EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* 2. Klassenarbeit	Lösung

Achte auf eine **ausführliche** Darstellung deiner Rechnungen und Gedankengänge! Lies die Texte sorgfältig! Denk nicht zu kompliziert, denn in jeder Teilaufgabe sind nur kleine Schritte zu gehen. In dieser Arbeit sind **weder GTR noch die Formelsammlung** erlaubt; also alles runter vom Tisch bis aufs Heft und deine Stifte. Viel Erfolg! ☺

AUFGABE 1 — 4 PUNKTE

Im Unterricht haben wir über den mathematischen Begriff „Funktion" gesprochen.

a) Erläutere, was du darunter verstehst und was die Begriffe „Definitionsbereich" und „Wertebereich" in diesem Zusammenhang bedeuten.

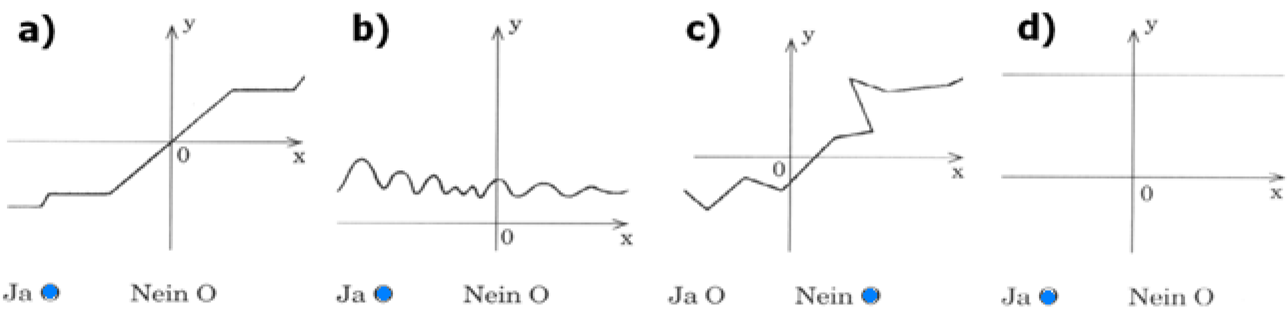
Eine Funktion ist eine Zuordnung, bei der einem „x" genau ein „y" zugeordnet ist. Was das „x" ist, bestimmt der Definitionsbereich. Das „y" ist aus dem Bereich, wohin die Funktion abbildet; der sog. Wertebereich.

b) Gib ein Alltagsbeispiel zum Begriff der Funktion und gib die dafür passenden Definitions- und Wertebereiche explizit an.

Ein Beispiel ist die Zuordnung „Bestellung beim Metzger" -> „Fragesatz des Metzgers". Die Bestellung umfasst Würste, Fleisch, Spieße, … unterschiedlicher Menge (Def.bereich), der Fragesatz ist immer „Sonst noch ein Wunsch?". Der Wertebereich umfasst also nur ein Element, es handelt sich um eine konstante Funktion!

AUFGABE 2 — 4 PUNKTE

Stellt der jeweilige Graph eine Funktion dar oder nicht? Begründe deine Antwort kurz, wenn sie „Nein" lautet.



In c) werden einem x mehrere y-Werte zugewiesen!

AUFGABE 3 — 2 PUNKTE

Die sogenannte „Kauderwelsch-Funktion" bezieht sich auf unsere Wörter: Wird sie auf ein Wort „losgelassen", so hängt sie jedem im Wort enthaltenen Konsonantenbuchstaben[1] ein „o" an und der Konsonant wird anschließend wiederholt. Wende die Kauderwelsch-Funktion auf den Ausdruck „Geheimbotschaft" an!

Also allgemein: x -> xox, wenn x ein Konsonant ist.
Lösung: „Gogehoheimombobototsoscochohafoftot".

---

[1] Gemeint sind Buchstaben für Mitlaute, also B, C, D und so weiter. Vokale wie A, E und so weiter sind nicht gemeint. Ob Klein- oder Großbuchstaben ist für beide Fälle egal!

AUFGABE 4 **4 PUNKTE**

Bestimme die Ableitung der Funktion *f*, die durch den Funktionsterm $f(x) = 25 - 3x$ gegeben ist, per Hand – also mit Hilfe des Differenzenquotienten („h-Methode"). Überprüfe dein Ergebnis mit den dir bekannten Regeln.

Unser Ansatz lautet:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wir setzen also in f einmal „x+h" und einmal „x" ein und packen beides in die obige Formel:

$$m = \frac{[25 - 3(x+h)] - [25 - 3x]}{h} = \frac{25 - 3x - 3h - 25 + 3x}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$$

Das Ergebnis lautet f '(x)=3 bzw. einfach m=3, denn die Funktion ist ja auch eine Gerade! Probe: f(x)=25-3x; die 25 fällt beim Ableiten weg, aus -3x wird -3. Passt.

AUFGABE 5 **2 PUNKTE**

Berechne die Steigung der Funktion aus Aufgabe 4 <u>zwischen den zwei Punkten</u> mit den x-Werten 1 bzw. 2!

Die Steigung zwischen zwei Punkten errechnet sich wie folgt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Jetzt brauchen wir also die y-Werte zu den x-Werten 1 und 2:

y1 = f(1) = 25 – 3 = 22 und y2 = f(2) = 25 – 6 = 19

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$m = \frac{19 - 22}{2 - 1} = -3$$

Auch hier ergibt sich natürlich als Steigung m=-3, denn f(x) ist eine Gerade, die überall die Steigung 3 aufweist, also immer zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Geraden.

AUFGABE 6 **6+1* PUNKTE**

Bestimme für die folgenden Funktionen die Ableitung nach x. Der Definitionsbereich umfasst immer alle reellen Zahlen. Du darfst dabei alle dir bekannten Ableitungsregeln anwenden!

a) $f(x) = x^2$
b) $b(x) = x - 7x^3$
c) $g(x) = 3 - x$
d) $p(x) = 250000$
e) $h(x) = 7(x-1)^2$
f) $k(x) = -5/x$

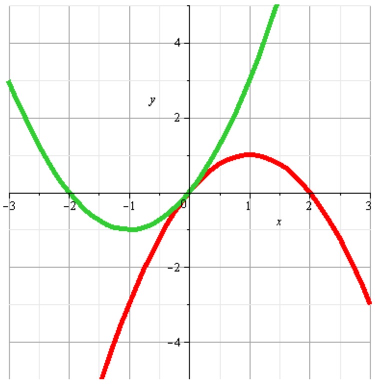
Zusatz: In Teilaufgabe* f) *ist für x die Null nicht erlaubt. Kannst du das erklären?*

a) f '(x) = 2x; b) f '(x) = 1-21x²; c) f '(x) = -1; d) f '(x) = 0; e) f '(x) = 14x-14, f) 5/x².
Zusatz: Würde man x=0 setzen, müsste man durch 0 teilen, was wir nicht dürfen.
Lösungstipp zu e): Ausmultiplizieren! Lösungstipp zu f): Umschreiben zur Hochzahl!

AUFGABE 7 **5 PUNKTE**

In der Mathematik nennt man zwei Funktionen „oskulierend“[2], wenn sie sich in einem Punkt berühren **und** dieselbe Steigung besitzen.

a) Weise für die Funktionen f und g mit den Funktionstermen $f(x) = (x+1)^2 - 1$ und $g(x) = -(x-1)^2 + 1$ nach, dass sie im Punkt P(0|0) oskulieren. Unten siehst du „den Kuss“:



Ein “Kuss” liegt vor, wenn beide Funktionen den Nullpunkt gemeinsam haben (also f(0) = g(0) = 0) UND die Steigung im Nullpunkt identisch ist.

Zuerst weisen wir „f(0) = 0“ nach: f(0) = (0+1)² – 1 = 1 – 1 = 0.
Jetzt weisen wir „g(0) = 0“ nach: g(0) = – (0 – 1)² + 1 = – 1+1 = 0. Ok!

Jetzt bestimmen wir die Steigungen f‘(0) und g‘(0). Dazu müssen wir beide Funktionen ableiten. Nach Ausmultiplizieren ergibt sich:

f‘(x) = 2x+2 und damit f‘(0) = 2 bzw. g‘(x)=-2x+2 und damit g‘(0)=2.

Somit stimmt die Behauptung, dass f und g im Nullpunkt oskulieren!

b) Welche der beiden Funktionen wird durch die nach oben geöffnete Kurve repräsentiert? Begründe zudem, warum du beide Kurven auch ohne GTR schnell zeichnen könntest!

Die nach oben geöffnete Kurve stellt f dar. Beide Parabeln lassen sich schnell zeichnen, da die Funktionsterme in Scheitelpunktform gegeben sind und es Normalparabeln sind.

AUFGABE 8 **3 PUNKTE**

Du leitest einen Strassenbautrupp. Dieser soll einen neuen Autobahnzubringer direkt vom E.I. auf die A5 bauen. Dabei wird eine gerade Straße bis kurz vor die Autobahn geplant, die dann in einer parabelförmigen Kurve auf die Autobahn führt. Begründe, wieso nie eine gerade Straße senkrecht auf eine Autobahn führt und was beim Bau zu beachten ist, wenn du an die „Gerade“ eine „Parabel“ anfügst. Erkennst du hier das Konzept der Ableitung wieder?! *(Tipp: Skizze!!!)*

Würde die Straße senkrecht auf die Autobahn treffen, käme es zu Verkehrsbehinderungen (Ampel nötig: Rückstau) und wegen des großen Tempounterschieds zu Unfällen beim Auffahren. Daher wird zwischen das „Geradenstück“ Straße und das „Geradenstück“ Autobahn eine „Parabel“ als Auffahrt zwischengeschaltet. Zwischen der Geraden und der Parabel darf es aber keinen Knick geben, ansonsten gäbe es wieder Probleme. Es ist genau dann kein Knick vorhanden, wenn die Steigung im Übergangspunkt übereinstimmen. Dies entspricht der Aussage, dass die Ableitungen der beiden Funktionen übereinstimmen. Insoweit taucht hier das Konzept der Ableitung auf.

---

[2] Oskulus, lat. – der Kuss