Folgen

Folgen kann man als Funktionen f mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge auffassen. Dazu muss man sich allerdings erinnern, was Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und auch die Wertemenge $\mathbb{W}$ waren!
Daher ganz kurz **(ist das zu knapp: Rückfragen, das gilt immer!)**: eine Funktion f wird mit bestimmten Zahlen x gefüttert (die kommen aus der Defintionsmenge $\mathbb{D}_f$, der Index $_f$ macht deutlich, wem die Menge gehört) und die Funktion f wirft sie dann auf eine neue Menge (das ist die Wertemenge $\mathbb{W}_f$, die anschaulich auch Bildbereich genannt wird). Formal schreibt man das so:

$$\text{allgemein } f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f, \text{ bzw. für Folgen } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Nun hat sich eine kürzere Notation bei Folgen eingebürgert (aus historischen Gründen und weil Mathematiker schreibfaul sind) und man schreibt für Folgen nicht $f(x)$ bzw. $f(n)$ (das wäre schon besser, da natürliche Zahlen allgemein mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet werden), sondern $a(n)$ bzw. ganz kurz: a_n. Ist aber nur Notation und nichts Geheimnisvolles! Wir verwenden a_n.

Hinweis: Für uns enthält die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ***einfach nicht die Null, dann haben wir als erstes Reihenglied immer*** a_1 ***und nicht*** a_0***. Wie gesagt, das letztere wird auch häufig verwendet und motiviert sich durch die Nähe zu Wachstumsprozessen, die ja auch zum Zeitpunkt*** $t = 0$ ***starten.***

Darstellung von Folgen

Folgen werden üblicherweise auf zwei Arten dargestellt, nämlich explizit bzw. rekursiv (auch gebraucht und wohl logischer ist *implizit*). Kurz zu den Darstellungen. Als Beispiel dienen die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, ... :

$$a_n = 2 \cdot n \text{ bzw. } a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 2$$

Beide Darstellungen legen die Folge eindeutig fest: Im ersten Fall setzt man einfach n ein und erhält direkt ein Ergebnis. Im zweiten Fall ist es etwas komplizierter, man muss den direkten Vorgänger kennen, um eine Aussage über den Nachfolger machen zu können. Daher braucht man hier den Startwert (für $a_1 = 1$ erhält man sonst bsp. die ungeraden Zahlen in der rekursiven Darstellung)!
Man kann sagen, dass in der expliziten Form praktisch ein funktionaler Zusammenhang von a_n und n gegeben ist (wen wundert's!? siehe oben!). Der rekursive Teil ist etwas ungewöhnlicher. Er führt direkt zu den sogenannten Differentialgleichungen, näheres dazu weiter unten.

Abgrenzung von Folgen zu Funktionen: Darstellung und Steigung

Graphen (schlau für Schaubilder) von Funktionen, die ihr bisher gesehen habt, sehen anders aus als Graphen von Folgen. Das liegt daran, dass der Definitionsbereich unterschiedlich ist und für Folgen in endlichen Schritten auf der x-Achse gewandert wird (man hüpft immer um 1 weiter). So entsteht eine Punktwolke (mehr Punkt als Wolke!) und keine Linie.
Zum Beispiel sieht man das an der Folge vom Arbeitsblatt $a_n = 0.8^n$ im Vergleich zur Funktion $f(x) = 0.8^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$:

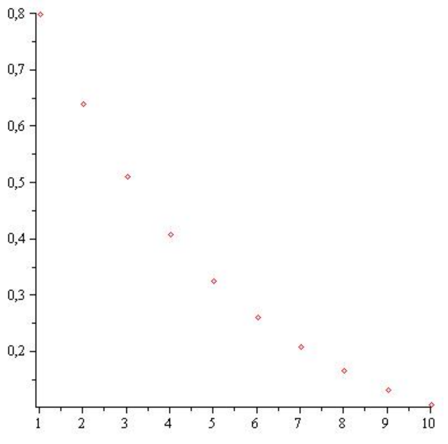

Abbildung 1: Folge

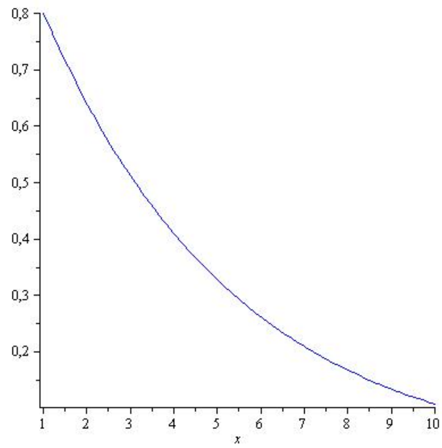

Abbildung 2: Dazugehörige Funktion

Genauso verhält es sich bei der Steigung. Für (differenzierbare) Funktionen haben wir die erste Ableitung in einem Punkt, aber was haben wir bei Folgen? Natürlich muss es da einen entsprechenden Begriff geben, denn Folgen sind Funktionen! Man kann auch hier den Differenzenquotienten aufstellen:

$$\frac{a_{n_0+h} - a_{n_0}}{h}$$

Für $h \to 0$ kommt man dann aber in Schwierigkeiten, denn schließlich setzt man $n_0 + h$ in die Folge ein und so darf man nicht beliebig kleine Werte für h nehmen, da $n_0 + h \in \mathbb{N}$ gelten muss! Da man auch nicht $h = 0$ wählen kann (erstens haben wir das nicht in unserem $\mathbb{N}$ (siehe oben) und zweitens teilen wir dann durch 0) bleibt als kleinste Zahl $h = 1$. Das entspricht dann der Tangentensteigung einer differenzierbaren Funktion. Es ist für festes n_0

$$a'_{n_0} = \frac{a_{n_0+1} - a_1}{1} = a_{n_0+1} - a_{n_0}$$

wobei a'_{n_0} als Kürzel „die Änderung der Folge in a_{n_0}" ausdrückt (frei erfundene Bezeichung und nicht die richtige Ableitung wie bei differenzierbaren Funktionen!)

Startwert und Chaos

Folgen können unglaublich stark vom Startwert abhängen. Es gibt Folgen, da entscheidet eine beliebig kleine Änderung über den kompletten Verlauf.
Normalerweise denkt man: kleine Änderung, kleine Wirkung. Aber das ist nicht so.
Es gibt dann chaotisches (im Sinne der Mathematik) Verhalten! Ein Beispiel ist die Mandelbrotmenge, die wir, wenn Zeit bleibt, kurz anschauen.