Analysis

ZAHLENFOLGEN

Teil 5

Beschränktheit und Grenzwerte

Beweise für beschränkte und unbeschränkte Folgen,
teilweise unter Verwendung der Monotonieeigenschaft.
Es werden auch schon einige Grenzwerte betrachtet.

Datei Nr. 40052

Friedrich Buckel

Juni 2003

Internetbibliothek für Schulmathematik

1 Einführungsbeispiele

Beispiel 1: $a_n = 4n - 4$

Betrachten wir die Zahlenfolge $a_n = 4n - 4$ mit den Werten $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$, ...
Dann erkennen wir schnell daß es sich um eine arithmetische Folge handelt, bei der das nächste Glied um jeweils 4 größer ist als der Vorgänger.

Diese Folge wächst streng monoton. Nun stellen die Mathematiker gerne die Frage, ob sie unbeschränkt wächst, also gegen Unendlich geht, oder ob sie eine bestimmte obere Grenze nicht übersteigt. Hier erkennt jeder schnell, daß die Glieder der Folge beliebig groß werden können, weil man ja beliebig oft die 4 dazuaddieren kann. Doch das ist kein Beweis, eher Intuition.

Ein richtiger Beweis geht diesen Weg:

*Wir wählen eine beliebige Zahl, die sehr groß sein soll, und wir nennen sie M.
Nun versucht man zu berechnen, ab welcher Nummer n die Glieder dieser Folge größer als M sind.*

Man schreibt daher auf:

Es sei also $M > 0$ eine beliebig große Zahl. Wann gilt $a_n > M$?

d.h. $$4n - 4 > M \Leftrightarrow 4n > M + 4 \Leftrightarrow n > \frac{M+4}{4}.$$

An Beispielen für M müssen wir nun verstehen, was diese Rechnung bewirkt:

M = 1000 führt zu $n > \frac{1004}{4} = 251.$
Ab der Nummer $n_o = 251$ ist somit $a_n > 1000$.

M = 40 000 führt zu $n > \frac{40\,004}{4} = 10\,001.$
Ab $n_0 = 10\,002$ gilt also $a_n > 40\,000$.

Man erkennt, daß man zu jeder beliebig großen Zahl M diese Rechnung durchführen kann und somit zu jeder solchen Zahl M die Nummer n_o berechnen kann, ab der die Glieder der Folge größer als M sind.

Also wird jede noch so „Hohe“ Grenze irgendwann überschritten, d.h.

ERGEBNIS: Diese Folge ist nach oben nicht beschränkt (unbeschränkt).

Übrigens ist diese Folge auch nach unten beschränkt, was man ganz schnell bewiesen hat:

Weil die Folge streng monoton wächst ist $a_1 = 0$ (also das erste Glied der Folge) auch die kleinste Zahl der Folge. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$.

Beispiel 2: $a_n = 40 - 2n$

Auch hier liegt eine arithmetische Folge vor, und der Nachfolger ist stets um 2 kleiner als der Vorgänger: d = - 2. Diese Folge fällt streng monoton.

Wir wollen beweisen, daß diese Folge nach unten nicht beschränkt ist.
Dazu schreibt man dies auf:

Es sei $M < 0$ eine beliebige negative Zahl.

Ab wann gilt $a_n < M$?

d.h. $40 - 2n < M$

$$-2n < M - 40 \quad \Big| : (-2)$$

$$n > \frac{M-40}{-2} \Leftrightarrow n > \frac{-M+40}{2}.$$

Man erkennt, daß man zu jeder negativen Zahl M auf diese Weise eine Zahl n_o findet, so daß gilt $a_n < M$ für $n \geq n_o$.

Jede vermeintliche untere Grenze wird also irgendwann unterschritten !

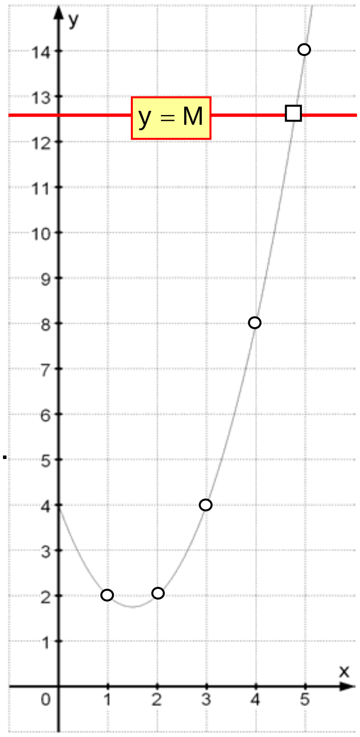
BEISPIEL: M = - 10 000 führt zu $n > \frac{10\,040}{2} = 5\,020$.
Ab n_o = 5 021 gilt also a_n < - 10 000.

ERGEBNIS: Die Folge ist nach unten unbeschränkt.

Zusatz: Da die Folge streng monoton fällt, ist a_1 = 38 (also das erste Glied der Folge) die größte Zahl der Folge.

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq 38$,
d.h. diese Folge ist auch nach oben beschränkt.

Beispiel 3: $a_n = n^2 - 3n + 4$



$a_1 = 1 - 3 + 4 = 2$, $a_2 = 4 - 6 + 4 = 2$, $a_3 = 9 - 9 + 4 = 4$,
$a_4 = 16 - 12 + 4 = 8$ $a_5 = 25 - 15 + 4 = 14$ usw.
Die Folge wächst monoton. Man kann sie graphisch als Punktfolge auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 3x + 4$ darstellen. Diese Parabel hat ihren Scheitel bei $x_S = \frac{3}{2}$ und weil sie nach oben geöffnet ist, nehmen die Werte rechts vom Scheitel ständig zu.

Auch hier soll die Frage nach der Beschränktheit gestellt werden.
Es sei M > 0 eine beliebig große Zahl. Ab wann gilt $a_n > M$?
d.h. $n^2 - 3n + 4 > M \Leftrightarrow n^2 - 3n + (4 - M) > 0$
Diese quadratische **Ungleichung** lösen wir mit der Parabelmethode, indem wir die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden y = M berechnen: Dafür gilt die **Gleichung**

$$x^2 - 3x + (4 - M) = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der allgemeinen Lösungsformel:

Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösung $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hiernach folgt: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(4 - M)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4M - 7}}{2}$

Da wir die Unbeschränktheit zeigen wollen, können wir davon ausgehen, daß M hinreichend groß sein wird, so daß der Radikand positiv wird. Dann hat die Gleichung auf jeden Fall zwei Lösungen. Für uns kommt die rechte Schnittstelle in Frage:

$$x_S = \frac{3 + \sqrt{4M - 7}}{2}$$

Dann ist n_0 die kleinste natürliche Zahl, die mindestens gleich x_S ist.
Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $a_n > M$.

Ergebnis: Diese Folge ist nach oben unbeschränkt.

BEISPIELE zur Berechnung von n_0 :

M = 1000 ergibt $x_S = \frac{3 + \sqrt{4000 - 7}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3993}}{2} \approx 33{,}1.$

Damit wird $n_0 = 34$ und für alle $n \geq 34$ ist $a_n > 1000$.

M = 50 000 000 ergibt $x_S = \frac{3 + \sqrt{199999993}}{2} \approx 2237{,}5...$

Also wird $n_0 = 2238$ und für alle $n \geq 2238$ ist $a_n > 50\,000\,000$.

2 Definitionen

Eine Folge heißt **nach oben unbeschränkt**, wenn es zu jeder beliebig großen Zahl M>0 eine Zahl n_0 gib, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$a_n > M$$

Eine Folge heißt **nach unten unbeschränkt**, wenn es zu jeder beliebig kleinen Zahl M<0 eine Zahl n_0 gib, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$a_n < M$$

Eine Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl M gibt
So daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$a_n \leq M$$

Eine Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl M gibt
So daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$a_n \geq M$$

Ist eine Folge nach oben und nach unten beschränkt (bzw. unbeschränkt), dann sagt man kurz „sie ist **beschränkt**“.

Sagt man aber „diese Folge ist **unbeschränkt**“,
dann gilt dies für eine, nicht unbedingt für beide Richtungen

Wir haben in den drei Beispielen zuvor gesehen, wie man bei algebraischen Folgen 1. und 2.Ordnung die Unbeschränktheit in der einen Richtung und die Beschränktheit in der anderen Richtung zeigt.

Wesentlich komplizierter können die Rechnungen sein, wenn man Bruchfolgen oder geometrische (Exponential-) Folgen zu untersuchen hat.

3 Beweistechniken bei Bruchfolgen

Beispiel 4: $a_n = \frac{2n+16}{n+5}$

Nur auf der Mathe-CD