Zahlenfolgen
Teil 3
Reihen

Reihen
Arithmetische Reihen
Geometrische Reihen

Datei Nr. 40013

(Neu bearbeitet und erweitert)

Juni 2005

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

Inhalt

Aufgaben dazu in der Datei 40021

Geometrische und arithmetische Reihen

1 DEFINITION EINER REIHE

Zu jeder Folge { a_n } kann man **Teilsummen** berechnen:

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a$ d.h. $s_2 = s_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ d.h. $s_3 = s_2 + a_3$
. . . .
$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Die Folge dieser Teilsummen nennt man eine ***Reihe***.

Verwendung des Summenzeichens

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Gelesen: Summe für i=1 bis 5 über a_i .

BEISPIELE

a) Die Folge $a_n = n$ mit 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ....
ergibt diese Reihe:
$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 2 = 3$
$s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
usw.
Es gilt allgemein: $s_n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$ (Beweis später)

b) Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ mit $\dfrac{1}{1\cdot 2}$; $\dfrac{1}{2\cdot 3}$; $\dfrac{1}{3\cdot 4}$; $\dfrac{1}{4\cdot 5}$; ...
ergibt diese Reihe:
$s_1 = \dfrac{1}{2}$, $s_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $s_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{6+2+1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$; ...
Es gilt allgemein:
$s_n = \dfrac{n}{n+1}$. Der Beweis wird schwer !

2 ARITHMETISCHE REIHEN

2.1 Summenformel

> Die zu einer arithmetischen Folge gehörende Folge der Teilsummen heißt eine arithmetische Reihe.

Beispiel 1: Die Folge der geraden Zahlen ist definiert durch:
$a_n = 2n$, also: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_4 = 8$; $a_5 = 10$; ...

Die Folge der Teilsummen ist dann

$$s_1 = a_1 = 2$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 12$$
$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Gibt es einen Term, der die Berechnung von s_n direkt ermöglicht ?

Beispiel 2: Die berühmteste arithmetische Reihe wurde bereits in Beispiel a) gezeigt und geht auf eine Geschichte des 9-jährigen Schülers Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855). Dieser erhielt von seinem Schulleiter Büttner und seinem Assistent Bartels die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er schaffte dies in so kurzer Zeit, daß die beiden auf seine mathematische Begabung aufmerksam wurden. Er hatte nämlich schnell beobachtet, daß man 50 mal die Summe 101 rechnen mußte:

$$\begin{array}{rcl} s_{100} &=& 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 \\ s_{100} &=& 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1 \\ \hline 2s_{100} &=& 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 \end{array}$$

So entstand die Gleichung $2s_{100} = 100 \cdot 101 \Rightarrow s_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$

Dies ist nun ein Prinzip, das man auf jede arithmetische Folge anwenden kann:

c) Die Folge sei $a_n = 4n + 1$, also 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ...

Wir wollen die ersten 30 Glieder dieser Folge addieren, d.h. die Summe s_{30} ist gesucht. Dazu müssen wir zuerst $a_{30} = 4 \cdot 30 + 1 = 121$ berechnen.

$$\begin{array}{rcl} s_{30} &=& 5 + 9 + 13 + ... + 113 + 117 + 121 \\ s_{30} &=& 121 + 117 + 113 + ... + 13 + 9 + 5 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \cdot s_{30} = 30 \cdot 126 \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot 126 = 1890$$

d) Daraus machen wir nun eine Formel. Man sollte jetzt erkennen, daß bei n Summanden n Summen auftreten, die alle so groß sind, wie $a_1 + a_n$:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + \underbrace{(a_1 + (n-3)d)}_{a_{n-3}} + \underbrace{(a_1 + (n-2)d)}_{a_{n-2}} + \underbrace{(a_1 + (n-1)d)}_{a_{n-1}}$$

$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + ... + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

Auf Grund der unterschiedlichen Länge dieser Summanden-Terme können die nicht sauber untereinander stehen. Daher zeigen die Pfeile, wer zusammengehört. Rechnen wir also nach:

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d) = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_1 + (n-3)d) = 2a_1 + (n-1)d$$

usw.

Zwischenergebnis: $2 \cdot s_n = n \cdot (a_1 + a_n) = n \cdot (2a_1 + (n-1)d)$.

Es folgt: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

Wenn man das ausmultipliziert, erhält man

$$s_n = na_1 + \tfrac{1}{2}n^2 d - \tfrac{1}{2}dn = \tfrac{1}{2}d \cdot n^2 + (a_1 - d) \cdot n$$

also einen quadratischen Term.

Doch diese Formel merkt sich keiner. Man sollte dies jedoch wissen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Für eine arithmetische Reihe gilt:} \\ s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (1) \\ s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \qquad (2) \\ s_n \text{ ist ein quadratischer Term.} \end{array}}$$

Die Formel (1) ist leicht zu merken, wenn man das Gaußsche Prinzip kennt.
Aus (2) folgt übrigens $s_n = \frac{n}{2} \cdot 2a + \frac{n}{2}(n-1)d = na + \frac{1}{2}dn^2 - \frac{1}{2}dn = \frac{1}{2}dn^2 + (a - \frac{1}{2}d) \cdot n$
Also ist s_n stets ein term dieser Bauart: $s_n = r \cdot n^2 + s \cdot n$ Ein Absolutglied ist also nicht vorhanden !

2.2 Musteraufgaben

(1) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 17 bis 63

LÖSUNG:

Die konstante Differenz $d = 1$ zeigt, daß eine arithmetische Reihe vorliegt. Wir müssen zuerst herausfinden, wieviele Glieder addiert werden sollen. Hier hilft das Lattenzaunprinzip. Haben wir 4 Lattenzäune, dann befinden sich darin 3 Zwischenräume. Tragen also die Latten die Nummern 17 , 18 , 19 , 20 dann erhalten wir durch Subtraktion 20 – 17 = 3 die Anzahl der Zwischenräume. Folglich sind es 4 Latten.
Hier tragen die Latten die Nummern 17 bis 63, also liegen 63 – 17 = 46 Zwischenräume vor, d.h. wir haben 47 Zahlen zu addieren.

$$s_{47} = 17 + 18 + ... + 63 = \frac{47}{2}(17 + 63) = \frac{47}{2} \cdot 80 = 47 \cdot 40 = 1880$$

AUFGABE 2

Berechne die Summe der ersten 20 Glieder dieser arithmetischen Folge:
$a_1 = 215$; $a_2 = 205$; $a_3 = 195$; ...

LÖSUNG

Wir müssen zuerst a_{20} berechnen: Es ist $d = a_2 - a_1 = -10$ (!)
und folglich $a_{20} = 215 + 19 \cdot (-10) = 215 - 190 = 25$

$$s_{20} = \frac{20}{2}(215 + 25) = 10 \cdot 240 = 2400$$

AUFGABE 3

Es ist $a_n = 100 - 7n$ Berechne $s_n = ?$

LÖSUNG

Man muß erkennt, daß $d = -7$ ist und berechnet $a_1 = 93$

Es folgt: $$s_n = \frac{n}{2} \cdot (93 + 100 - 7n) = \frac{n}{2}(193 - 7n) = -\frac{7}{2}n^2 + \frac{193}{2}n$$

AUFGABE 4

Es ist $a_4 = 64$ und $a_9 = 99$ Berechne s_{25} .

Usw. auf der Mathematik-CD

2.3 Arbeiten mit dem Summenzeichen

Um Summen kompakt darstellen zu können, hat man eine Abkürzung definiert:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{7} a_i := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}$$

Das Symbol ist ein großes griechisches S , genannt Sigma. Es befiehlt, die Summanden a_i aufzusummieren, und zwar für die Indizes 1 bis 7.

Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen besagt, dass hier eine Definition vorliegt. Man liest := als „sei“. Also $\sum_{i=1}^{7} a_i$ sei $a_1 + a_2 + \ldots + a_7$.

Wenn man sei sagt oder := schreibt, kann man nicht fragen, warum das so ist, denn diese Beziehung wird hier festgelegt und kann nicht bewiesen werden. Also wäre 5:=2+3 falsch, denn dass 5 dasselbe ist wie 2 + 3 kann man beweisen, das wird nicht festgelegt !

Man liest dies so: **Summe der a_i von i = 1 bis 7 .**

Noch einige Beispiele zur Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$\sum_{i=3}^{7} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

$$\sum_{k=4}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\sum_{k=0}^{15} (2i+5) = (2\cdot 0+5) + (2\cdot 1+5) + (2\cdot 2+5) + (2\cdot 3+5) + \ldots + (2\cdot 15+5)$$

$$\sum_{i=1}^{8} x^{2i} = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{16}$$

Wieviele Summanden umfaßt eine solche Summe ?

Schauen wir uns dieses Beispiel an: $\sum_{i=3}^{7} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$, dann zählen wir 5 Summanden, und die Summe läuft von i = 3 bis i = 7.
Denken wir uns einen Lattenzaun, auf dem die Nummern 3 bis 7 aufgemalt sind. Dann hat dieser Lattenzaun 7 – 3 also 4 Zwischenräume und folglich 5 (4+1) Latten.

$$\underbrace{\boxed{3}\quad\boxed{4}\quad\boxed{5}\quad\boxed{6}\quad\boxed{7}}_{\boxed{7-3=4 \text{ Zwischenräume} \quad \Rightarrow \quad 5 \text{ Glieder}}}$$

Merke: $\sum_{i=a}^{b} \ldots$ **enthält b - a + 1 Summanden !**

Berechnung solcher Summen, wenn sie arithmetische Reihen darstellen:

(1) $\sum_{n=1}^{8}(2n-1)$ Der Term $a_n = 2n-1$ definiert eine arithmetische Folge.

Die zu berechnende Teilsumme aus den ersten 8 Gliedern wird gemäß der Reihenformel so berechnet:

$$\sum_{n=1}^{8}(2n-1) = \frac{8}{2}\cdot(a_1 + a_8) = 4\cdot(1+15) = 4\cdot 16 = 64$$

Weiter auf der Mathematik-CD

3 GEOMETRISCHE REIHEN

3.1 Herleitung der Summenformel

Von einer geometrischen Folge mit der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{a_n = a_1\, q^{\,n-1}}$$

können natürlich auch Teilsummen berechnet werden. Die Berechnungsformel für die geometrische Reihe entsteht durch einen einfachen Rechentrick: Man schreibt zuerst die Summe auf, und darunter die q-fache Summe, die man dann subtrahiert:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1\, q^{\,n-2} + a_1q^{\,n-1} \qquad (1)$$

$$q\, s_n = \qquad a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1\, q^{\,n-2} + a_1q^{\,n-1} + a_1q^{\,n} \qquad (2)$$

(1) – (2): $$s_n - q\, s_n = a_1 - a_1\, q^n$$

Alle untereinander stehenden Summanden der rechten Seite sind gleich und fallen daher bei der Subtraktion weg. Nun klammert man links und rechts aus und erhält:

$$s_n\,(1 - q) = a_1\,(1 - q^{\,n})$$

Daraus folgt:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Bemerkungen:

1. *Diese Formel gilt zunächst einmal nur für $q \neq 1$.*
2. *Der letzte Term entsteht durch Erweiterung mit – 1.*
3. *Die erste Summenformel eignet sich für $q < 1$ (also auch für negatives q), die zweite Formel dagegen für $q > 1$.*

3.2 Musterbeispiele

(1) Eine geometrische Folge wird durch $a_1 = 16$ und $q = {}^1/_2$ definiert.
Dann können wir zunächst einmal die Folge aufschreiben:
$a_1 = 16$; $a_2 = 16 * {}^1/_2 = 8$; $a_3 = 4$; $a_4 = 2$; $a_5 = 1$; ... $a_6 = {}^1/_2$; $a_7 = {}^1/_4$ . . .
und die allgemeine Berechnungsformel wird zu

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 16 \cdot (\tfrac{1}{2})^{n-1} = 2^4 \cdot 2^{-n+1} = 2^{5-n}}$$

Die Partialsummen (Teilsummen) dazu sind

$s_1 = a_1$ $= 16$
$s_2 = a_1 + a_2$ $= 16 + 8 = 24$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $= 24 + 4 = 28$
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ $= 28 + 2 = 30$

Für größere Teilsummen empfiehlt sich die Verwendung der Berechnungsformel für die geometrische Reihe:

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Da hier $q < 1$ ist, verwenden wir die erste Bruchdarstellung und erhalten:

$$s_6 = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot (1-(\tfrac{1}{2})^6) = 32 \cdot (1-\tfrac{1}{64}) = 32 \cdot \tfrac{63}{64} = 31{,}5$$

Und $$s_{20} = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{20}}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot [1-(\tfrac{1}{2})^{20}] = 32 - 32 \cdot (\tfrac{1}{2})^{20} \approx 31{,}999\,969$$

$$\boxed{s_n = 16 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 32 \cdot (1-(\tfrac{1}{2})^n)}$$

Wenn man die Berechnung von s_8 und s_{20} verfolgt, kann man einen Trend erkennen, der für viele solcher Folgen gleichartig ist: Der Faktor q^n wird mit zunehmendem n und einem Faktor q zwischen 0 und 1 immer kleiner, so daß sich die Summe nur noch unmerklich vergrößert. Man kann mit dem Taschenrechner hier nachprüfen, daß sich s_n beliebig dicht an die Zahl 32 annähert (aber nie erreicht!). Solche „konvergenten“ Folgen werden später extra untersucht.

(2) Berechne das Ergebnis der geometrischen Reihe $1 + 4 + 16 + ... + 4^{10}$.

Fortsetzung auf der Mathe-CD

3.3 Arbeiten mit dem Summenzeichen

(1) $$\sum_{n=0}^{10} 4^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + ... + 4^{10} = 1 \cdot \frac{4^{11}-1}{4-1} = \frac{4^{11}-1}{3} = 1\ \ 398\ \ 101\ ,$$

denn die Summe umfaßt 10-0+1=11 Summanden

Mehr davon auf der Mathe-CD