ZAHLENFOLGEN
1

Einführende Beispiele
Arithmetische Folgen

Datei Nr. 40011 SW

Das komplette Manuskript befindet sich auf der
Mathematik - CD

Friedrich Buckel

Februar 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

Die Lösungen zu den meisten Aufgaben und das Kapitel 3 befinden sich nur auf der Mathematik-CD.

Die Fortsetzung (Geometrische Folgen) folgt in der Datei „Folgen 2“ Nr. 40012.

1 Einführende Beispiele

1.1 Erste Definition

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete und numerierte Liste von Zahlen, die entweder in der aufzählenden Schreibweise oder durch eine Berechnungsvorschrift gegeben sein kann.

1.2 Beispiele

Zahlenfolgen in der aufzählenden Schreibweise:

(a)	$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots$	Diese Folge besteht aus allen geraden Zahlen in steigender Folge, beginnend bei 2.
(b)	$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots$	Es handelt sich um die Folge der Quadratzahlen, beginnend bei 1.
(c)	$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ \ldots$	Es handelt sich um die Folge aller Primzahlen. Es gibt dazu keine algebraische Bildungsvorschrift.
(d)	$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ldots$	Dies ist die Folge aller Stammbrüche. Sie haben im Zähler stets die Zahl 1.
(e)	$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$	Dies ist eine steigende Folge von Zahlen mit dem Abstand 4, beginnend bei 3.
(f)	$5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \ldots$	Die ist eine alternierende Folge (d.h. mit wechselnden Vorzeichen), bestehend nur aus 5 und -5.
(g)	$-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ \ldots$	Diese Folge beschreibt man wie (f), sie beginnt nur mit – 5 und ist daher eine andere Zahlenfolge !!
(h)	$4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ldots$	Dies ist die Folge der Zahlen, die aus 4 durch fortgesetzte Halbierung entsteht.
(i)	$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ldots$	Diese Folge beginnt mit zwei Einsen, dann folgt jeweils die Summe der beiden Vorgänger
(j)	$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ldots$	Die Folge beginnt mit $\frac{1}{2}$. Dann erhöhen sich Zähler und Nenner jeweils um 1.
(h)	$100;\ 99;\ 92;\ 73;\ \ldots$	Die Folge beginnt mit 100. Dann wird jeweils eine Kubikzahl subtrahiert, beginnend mit 1^3.

1.3 Übungen mit Lösungen auf Seite 3

Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreibe die nächsten 4 dazu und gib die Bildungsvorschrift mit Worten an.

(a) $-8;\ -4;\ 0;\ 4;\ ...$

(b) $12;\ 6;\ 4;\ 3;\ ...$

(c) $28;\ 21;\ 14;\ 7;...$

(d) $8;14;\ 20;\ 26;\ ...$

(e) $60;\ 59;\ 56;\ 51;\ ...$

(f) $-24;\ -23;\ -20;\ -15;\ ..$

(g) $3;\ 9;\ 27;\ 81;$

(h) $78;\ 72;\ 54;\ 0;...$

(i) $5;-10;15;-20;\ ...$

(j) $5;-10;20;-40;\ ...$

(k) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ ...$

(l) $24;-12;\ 6;\ -3;\ ...$

(m) $\frac{4}{3};\ 1;\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ ...$

1.4 Aufgaben

Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreibe die nächsten 4 dazu und gib die Bildungsvorschrift mit Worten an.

(a) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ ...$

(b) $\frac{1}{16};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};...$

(c) $40;\ 28;\ 16;\ 4;\ ...$

(d) $\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{5};...$

(e) $99;\ 96;\ 91;\ 84;\ ...$

(f) $\frac{2}{3};\ \frac{9}{4};\ \frac{8}{27};\ \frac{81}{16};...$

(g) $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;...$

(h) $36;\ 9;\ \frac{9}{4};\ \frac{9}{16};\ ...$

(i) $0;6;-6;18;\ ...$

(j) $\frac{15}{8};\ 1;\ \frac{5}{12};\ 0;\ ...$

(k) $4;\ 5;\ 8;\ 13;$

(l) $\frac{16}{27};\ \frac{8}{9};\ \frac{4}{3};\ 2;...$

Lösungen zu 1.3

(a) $-8;\ -4;\ 0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20$ (blau die neuen Glieder der Folge)
Aufsteigende Folge mit Abstand 4, beginnend bei –8.

(b) $12=\frac{12}{1};\ 6=\frac{12}{2};\ 4=\frac{12}{3};\ 3=\frac{12}{4};\ \frac{12}{5};\ \frac{12}{6}=2;\ \frac{12}{7};\ \frac{12}{8}=\frac{3}{2};\ldots$ (rot zur Erklärung)
Die Folge besteht aus Brüchen mit dem Zähler 12 und dem Nenner 1, 2, 3 usw.

(c) $28;\ 21;\ 14;\ 7;\ 0;\ -7;\ -14;\ -21;\ldots$
Fallende Folge mit der Differenz 7, beginnend bei 28.

(d) $8;14;\ 20;\ 26;\ 32;\ 38;\ 44;\ 50;\ \ldots$
Steigende Folge mit der Differenz 6, beginnend bei 8.

(e) $60;\ 59=60-1;\ 56=60-4;\ 51=60-9;\ 44=60-16;\ 35;\ 24;\ 11;\ldots$
Die Folge entsteht aus 60 durch Subtraktion der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16 , ...

(f) $-24;\ -23=-24+1;\ -20=-24+4;\ -15=-24+9;\ -24+16=-8;\ 1;\ 37;\ 50;\ldots$
Die Folge entsteht aus – 24 durch Addition der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16 , ...

(g) $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243;\ 729;\ 2187;\ 6561;\ \ldots$
Es handelt sich um Dreierpotenzen.

(h) $78=81-3;\ 72=81-9;\ 54=81-27;\ 0=81-81;-162;\ -648;\ -2592;\ -10368$
Die Dreierpotenzen werden von 81 subtrahiert.
Oder diese Lösung:
$$78\xrightarrow[-6]{}72\xrightarrow[-3\cdot 6=-18]{}54\xrightarrow[-3\cdot 18=-54]{}0\xrightarrow[-3\cdot 54=-162]{}-162\xrightarrow[-3\cdot 162]{}-648$$
usw.

(i) $5;-10;15;-20;\ 25;\ -30;\ 35;\ -40;\ \ldots$
Die Folge besteht aus ganzzahligen Vielfachen von 5. Die geradzahligen Vielfachen erhalten ein negativem Vorzeichen.

(j) $5;-10;20;-40;\ 80;\ -160;\ 320:\ -640;\ \ldots$
Alternierende Folge, beginnend mit 5. Fortgesetzte Multiplikation mit (-2) .

(k) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ -7;\ -9;\ -11;\ -13;\ -15;\ \ldots$
Es wird fortlaufend 2 subtrahiert, beginnend bei 1.

(l) $24=\frac{24}{1};-12=-\frac{24}{2};\ 6=\frac{24}{4};\ -3=-\frac{24}{8};\ \frac{3}{2}=\frac{24}{16};\ -\frac{3}{4}=-\frac{24}{32};\ \frac{3}{8}=\frac{24}{64};\ -\frac{3}{16};\frac{3}{32};-\frac{3}{63};\ \ldots$
Entweder: 24 dividiert durch Zweierpotenzen 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; usw.
Oder 24 wird fortgesetzt durch 2 dividiert. Zusätzlich alternierendes Vorzeichen.

(m) $\frac{4}{3};\ 1=\frac{6}{6};\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ \frac{12}{15}=\frac{4}{5};\ \frac{14}{18}=\frac{7}{9};\ \frac{16}{21};\ \frac{18}{24}=\frac{3}{4}$
Beginnend mit $\frac{4}{3}$ wird fortgesetzt im Zähler 2, im Nenner 3 dazuaddiert.

Lösungen zu 1.4 (blau = neu, rot = Erklärung)

(a) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ -7;\ -9;\ -11;\ -13;\ldots$
Fallende Folge durch fortgesetzte Subtraktion von – 2, beginnend mit 1.

(b) $\frac{1}{16};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{1}=1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots$
Wachsende Folge durch fortgesetzte Multiplikation mit 2, beginnend bei $\frac{1}{16}$

(c) $40;\ 28=40-12;\ 16=28-12;\ 4=26-12;\ -8;\ -20;\ -32;\ -44$
Fallende Folge durch fortgesetzte Subtraktion von 12, beginnend bei 40.

(d) $\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}=\frac{2}{6};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{5}=\frac{4}{10};\ \frac{5}{12};\ \frac{6}{14}=\frac{3}{7};\ \frac{7}{16};\ \frac{8}{18}=\frac{4}{9};\ \ldots$
Folge von Bruchzahlen, deren Zähler um 1 und der Nenner um 2 vergrößert werden, beginnend bei $\frac{1}{4}$.

(e) $99=100-1;\ 96=100-4;\ 91=100-9;\ 84=100-16;\ 75;\ 64;\ 51;\ 36;\ \ldots$
Von 100 wird die Folge der Quadratzahlen subtrahiert.

(f) $\frac{2}{3};\ \frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2};\ \frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3};\ \frac{81}{16}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4};\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=\frac{32}{243};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}=\frac{729}{64};\ \frac{128}{2187};\frac{6561}{256}$
Der Bruch $\frac{2}{3}$ wird potenziert und jeder folgende Bruch ist der Kehrwert des Vorgängers.

(g) $1;\ 2;\ 3=1+2;\ 5=2+3;\ 8=3+5;13=5+3;\ 21;\ 34;\ 55;\ \ldots$
Die ersten beiden Zahlen sind 1 und 2, dann ist jede weitere Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger

(h) $36;\ 9;\ \frac{9}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{9}{64};\frac{9}{256};\ \frac{9}{2048};\ \frac{9}{8192};\ \ldots$
Die Folge beginnt mit 36, dann wird fortlaufend durch 4 dividiert.

(i) $0=2+(-2);6=2+(-2)^2;-6=2+(-2)^3;18=2+(-2)^4;\ -30=2+(-2)^5;$
$68=2+(-2)^6;\ -126=2+(-2)^7;258=2+(-2)^8$
Zur Zahl 2 werden ganzzahlige Potenzen von (-2) addiert.

(j) $\frac{15}{8};\ 1=\frac{10}{10};\ \frac{5}{12};\ 0=\frac{0}{14};\ -\frac{5}{16};\ -\frac{5}{9}=-\frac{10}{18};\ -\frac{3}{4}=-\frac{15}{20};\ -\frac{10}{11}=-\frac{20}{22}$
Die Folge beginnt mit $\frac{15}{8}$. Dann wird fortgesetzt der Zähler um 5 verkleinert, der Nenner um 2 vergrößert.

(k) $4;\ 5=4\boxed{+1};\ 8=8\boxed{+3};\ 13=8\boxed{+5};\ 20=13\boxed{+7};\ 29=20\boxed{+9};\ 40=29\boxed{+11};\ 53$
Die Folge beginnt mit 4, dann wird fortgesetzt die Folge der ungeraden Zahlen addiert.

(l) $\frac{16}{27};\ \frac{8}{9}=\frac{16}{27}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ \frac{4}{3}=\frac{8}{9}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ 2=\frac{4}{3}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ 3;\ \frac{9}{2};\ \frac{27}{4};\ \frac{81}{8};\ \ldots$

Die Folge beginnt mit $\frac{16}{27}$. Dann wird fortgesetzt mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

1.5 Zahlenfolgen sind Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung: Jeder Zahl des Definitionsbereiches wird ein eindeutiger Funktionswert zugeordnet. Dabei wird die Grundmenge der reellen Zahlen zugrunde gelegt. Der Definitionsbereich ist die Teilmenge der Grundmenge, der auch wirklich Funktionswerte zugeordnet werden (können).

Nimmt man als Grundmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, oder aber $\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;...\}$, dann wird jeder natürlichen Zahl ein Funktionswert zugeordnet. Man nennt dies dann auch Zahlenfolge.

(a) Nehmen wir den Funktionsterm $f(n) = 2n$ mit $\mathbf{G} = \mathbf{N}$, dann erhalten wir diese Folge: $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4) = 8$ usw.
Meistens schreibt man dafür dann kürzer $a_1 = 2$, $a_2 = 4$; $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ usw.
Die war das Beispiel (a) von Seite 1.

(b) Oder $f(n) = n^2$ bzw. $a_n = n^2$ ergibt $a_1= 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$ usw.
Dies war Beispiel (b) von Seite 1.

Hier eine Reihe weiterer Funktionsterme für Zahlenfolgen:

(c) $f(n) = 4n - 1$ bzw. $a_n = 4n - 1$. Dies ergibt die Folge 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; ...

(d) $f(n) = a_n = 50 - 5n$ ergibt $a_1 = 45$; $a_2 = 40$; $a_3 = 35$; $a_4 = 30$; ...

(e) $a_n = n^2 - 2n$ ergibt $a_1 = -1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 3$; $a_4 = 8$ usw.

(f) $a_n = \dfrac{16}{n}$ ergibt $a_1 = 16$; $a_2 = 8$; $a_3 = \frac{16}{3}$; $a_4 = 4$; ...

(g) $a_n = \dfrac{3n+1}{n-3}$ ergibt $a_1 = -2$; $a_2 = \frac{7}{-1} = -1$; $a_3 = \frac{10}{0}$ existiert nicht !!

$a_4 = 13$; $a_5 = 8$; $a_6 = \frac{19}{3}$; ...

Hier gibt es für die Zahl 3 keinen Funktionswert, d.h. das 3. Glied der Folge existiert nicht. Sie hat ausnahmsweise einen eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbf{D} = N \setminus \{3\}$.

(h) $a_n = (-1)^n$ ist eine ganz interessante Folge.
Für gerades n wird der Wert +1, für ungerades n dagegen – 1:
$a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $a_3 = -1$; ... usw.

(i) $a_n = (-1)^n \cdot (2n+5)$ Der Faktor $(-1)^n$ macht die Folge zu einer **alternierenden** Folge, d.h. die Glieder haben abwechselnd positives und negatives Vorzeichen:

$a_1 = -7$; $a_2 = +9$; $a_3 = -11$; $a_4 = 13$ usw.

(j) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n+5)$. Vergleiche bitte die Folgen (i) und (j). Der einzige Unterschied ist der Faktor $(-1)^n$ bzw. $(-1)^{n+1}$
Die Wirkung sieht man in einer Tabelle am besten:

n	$(-1)^n$	$(-1)^n \cdot (2n+5)$	$(-1)^{n+1}$	$(-1)^{n+1} \cdot (2n+5)$
1	-1	-7	+1	+7
2	+1	+9	-1	-9
3	-1	-11	+1	+11
4	+1	+13	-1	-13
5	-1	-15	+1	+15

Wenn n gerade ist, dann ist n+1 ungerade und umgekehrt. Die Glieder der Folgen in (i) und (j) haben also stets das entgegengesetzte Vorzeichen:

(k) Drei ganz wichtige Folgen sind
(1) $a_n = 2n$ Sie liefert alle **geraden** Zahlen
(2) $a_n = 2n-1$ Sie liefert alle **ungeraden** Zahlen.
(3) $a_n = 2n+1$ Sie liefert ebenfalls nur **ungerade** Zahlen, beginnend allerdings ab $a_1 = 3$. Läßt man hier jedoch bereits n ab 0 laufen, dann erhält man wegen $a_0 = 0$ auch alle ungeraden Zahlen.

1.6 Übungen dazu

Berechne jeweils 5 Glieder dieser Folgen.

(a) $a_n = 3n-11$

(b) $a_n = 24-10n$

(c) $a_n = n^2 - 16$

(d) $a_n = n^2 - 2n + 3$

(e) $a_n = n^3 - n^2 - 18$

(f) $a_n = \frac{n-4}{n}$

(g) $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4}$

(h) $a_n = \frac{4n+(-1)^n}{2n}$

(i) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^2+4}{n-4}$

(j) $a_n = \frac{2^n}{n}$

(k) $a_n = \frac{8}{2^{n-1}}$

(l) $a_n = 3^{2n-1}$

(m) $a_n = \sqrt{n+4}$

(n) $a_n = \sin(n \cdot \frac{\pi}{4})$

(o) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$

(p) $a_n = n^{(-1)^n}$

(q) $a_n = (2n-1)^{n-1}$

(r) $a_n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n$

Lösungen zu 1.6

Nur auf der CD.

1.7 Rekursive Folgen

Eine Folge heißt rekursiv, wenn man keine direkte Möglichkeit hat, beliebige Glieder der Folge (z.B. a_{37}) zu berechnen, sondern wenn man die Glieder der Folge aus seinen Vorgängern berechnet.

Beispiele:

(a) $a_1 = 5;\quad a_n = a_{n-1} + 3.$

Hier berechnet man $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8.$
oder $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11.$

Aber $a_{37} = a_{36} + 3 = ?$
Wenn man a_{36} noch nicht kennt, dann läßt sich auch a_{37} nicht berechnen.

(b) $a_1 = 2;\quad a_n = -a_{n-1}$
Also: $a_2 = -a_1 = -2$
Dann $a_3 = -a_2 = 2$
$a_4 = -a_3 = -2$ usw.

(c) $a_1 = 20;\quad a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$
Also: $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 10$
Dann $a_3 = \frac{1}{2} a_2 = 5$
$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = 5$ usw.

(d) $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} - n$
Also $a_2 = 3 - 2 = 1$
Dann $a_3 = 3 - 3 = 0$
$a_4 = 0 - 4 = -4$ usw.

(e) $a_1 = 1;\quad a_2 = 1;\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
Also $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$
Dann $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$
$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$ usw.

1.8 Rekursive Folgen - Aufgaben

(a) $a_1 = 12;\quad a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$

(b) $a_1 = 1;\quad a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} + 1$

(c) $a_1 = 4;\quad a_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot a_{n-1}$

(d) $a_1 = -1;\quad a_n = 4 - a_{n-1}$

(e) $a_1 = 1;\quad a_n = a_{n-1}^{\ 2}$

(f) $a_1 = -2;\quad a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}^{\ 2}$

(g) $a_1 = 2;\quad a_n = \dfrac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}}$

(h) $a_1 = 2;\ a_2 = 1;\quad a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$

(i) $a_1 = 4;\quad a_n = a_{n-1} + \dfrac{n-1}{n}$

(k) $a_1 = 0;\quad a_n = 2^{a_{n-1}}$

Lösungen zu 1.8

Nur auf CD

2 Lineare Folgen - Arithmetische Folgen

Didaktische Vorbemerkung

Man kann die Einführung dieser speziellen Folgen auf zwei prinzipiell verschiedene Arten machen. Entweder man definiert eine arithmetische Folge durch die konstanten Abstände ihrer Glieder, oder man geht vom linearen Funktionsterm aus. Ich beschreite hier den letzten Weg.

2.1 Definition einer linearen Folge

Eine Folge, die durch eine linearen Funktionsterm $a_n = d \cdot n + c$ definiert wird, heißt eine **lineare Folge**.

Beispiele:

(a) $a_n = n - 2$ ergibt $a_1 = -1;\ a_2 = 0;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3$ usw.

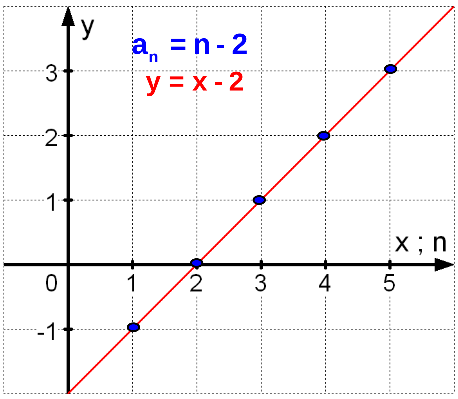
(b) $a_n = 2n + 1$ ergibt $a_1 = 3;\ a_2 = 5;\ a_3 = 7;\ a_4 = 9;\ a_5 = 11$ usw.

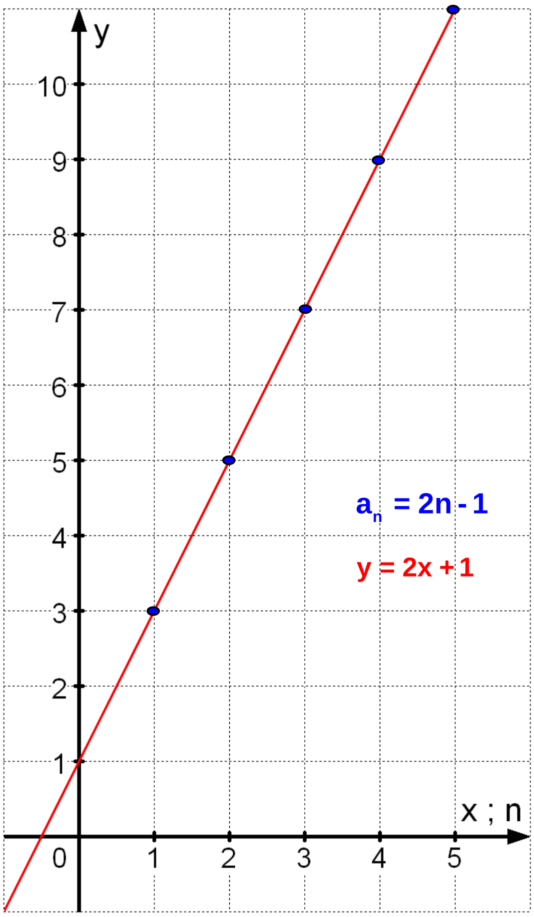
Nun schreibe ich zwei lineare Gleichungen auf:

(1) $y = x - 2$ und (2) $y = 2x + 1$, Diese Gleichungen stellen Geraden im x-y-Achsenkreuz dar. Auf ihnen liegen die Punkte, die zur Folge gehören:

Bei (a): $(1|-1);(2|0);(3|1);(4|2);(5|3)$ usw.

Bei (b): $(1|3);(2|5);(3|7);(4|9);(5|11)$ usw.





Man erkennt, daß die zur Folge gehörenden Punkte $(1|a_1);(2|a_2);\ldots;(n|a_n);\ldots$ auf den Geraden liegen, die zu den x-y-Gleichungen gehören.

Das Schaubild einer Zahlenfolge ist also nur eine Menge einzelner Punkte.

Weil diese Punkte auf einer Geraden liegen, ist der Begriff „lineare Folge" verständlich.

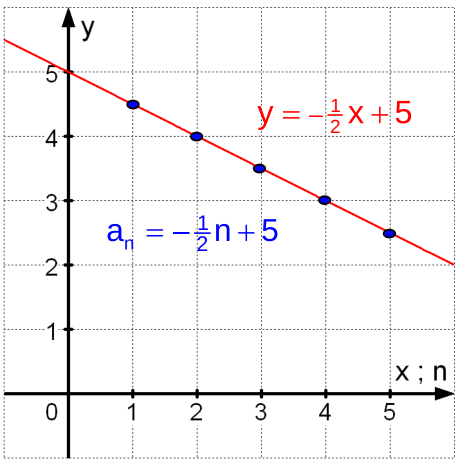
(c) $a_n = -0{,}5 \cdot n + 5$ $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3{,}5$; $a_4 = 3$; $a_5 = 2{,}5$ usw.

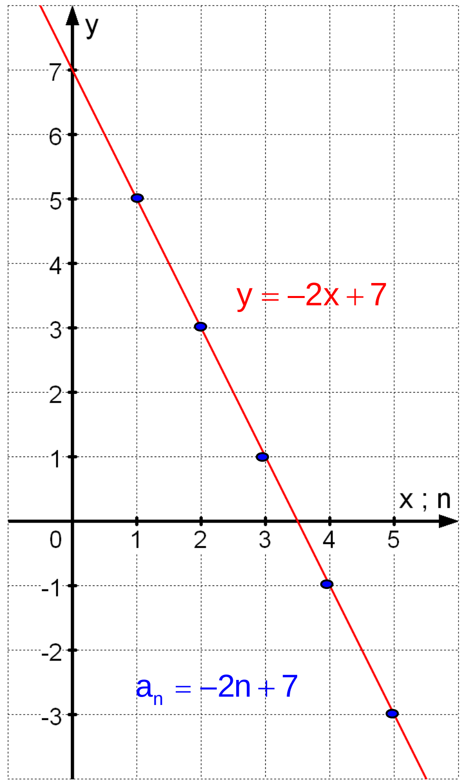
(d) $a_n = 7 - 3n$ $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$ usw.

Die Gleichungen der zugehörigen Geraden sind

(3) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ und (4) $y = -3x + 7$

Hier die zugehörigen Schaubilder.





2.2 AUFGABEN

Berechne die ersten 5 Glieder der linearen Folge und erstelle ein Schaubild:

(a) $a_n = \frac{3}{2}n - 5$

(b) $a_n = \frac{1}{4}n + 3$

(c) $a_n = -4n + 12$

(d) $a_n = -\frac{1}{2}n$

2.3 Die wichtige arithmetische Eigenschaft einer linearen Folge

Das Beispiel (a) in 2.1 enthielt die Folge $a_n = n - 2$ mit den Werten

$$a_1 = -1;\ a_2 = 0;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3 \quad \text{usw.}$$

Wir beobachten: $-1 \xrightarrow[+1]{} 0 \xrightarrow[+1]{} 1 \xrightarrow[+1]{} 2 \xrightarrow[+1]{} 3 \xrightarrow[+1]{} \ldots$

Das Beispiel (b) in 2.1 enthielt die Folge $a_n = 2n + 1$ mit den Werten

$$a_1 = 3;\ a_2 = 5;\ a_3 = 7;\ a_4 = 9;\ a_5 = 11$$

Wir beobachten: $3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+2]{} 7 \xrightarrow[+2]{} 9 \xrightarrow[+2]{} 11 \xrightarrow[+2]{} \ldots$

Die Folge $a_n = 3n + 15$ hat die Werte $a_1 = 18;\ a_2 = 21;\ a_3 = 24;\ a_4 = 27;\ a_5 = 30;\ \ldots$

Wir beobachten: $18 \xrightarrow[+3]{} 21 \xrightarrow[+3]{} 24 \xrightarrow[+3]{} 27 \xrightarrow[+3]{} 30 \xrightarrow[+3]{} \ldots$

Die Folge $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ hat die Werte $a_1 = -\frac{3}{2};\ a_2 = -1;\ a_3 = -\frac{1}{2};\ a_4 = 0;\ a_5 = \frac{1}{2};\ \ldots$

Wir beobachten $-\frac{3}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} -1 \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} -\frac{1}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} 0 \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} \ldots$

Zusammengefaßt: Der Abstand, also die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist bei diesen linearen Folgen immer gleich groß, und zwar so groß, wie der Koeffizient von n angibt:

Bei $a_n = 1 \cdot n - 2$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 1.
Bei $a_n = 2n + 1$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 2.
Bei $a_n = 3n + 15$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 3.
Bei $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder $\frac{1}{2}$.

Das läßt den Verdacht aufkommen, daß das immer so ist:

> Bei einer linearen Folge ist der Abstand (die Differenz) aufeinander folgender Glieder immer konstant.
> Daher heißen solche Folgen auch **arithmetische** Folgen.

Beweis:

Eine lineare Folge hat einen Funktionsterm der Form $a_n = d \cdot n + c$.

Dann lautet das nächste Glied: $a_{n+1} = d \cdot (n+1) + c = dn + d + c$.

Wir berechnen die Differenz: $a_{n+1} - a_n = (d \cdot n + d + c) - (d \cdot n + c) = d$

Ergebnis: Die Differenz aufeinanderfolgender Glieder einer linearen Folge ist konstant und zwar so groß, wie der Koeffizient von n angibt.

Bemerkung: Dieser Koeffizient ist bei der entsprechenden x-y-Geradengleichung $y = mx + n$ die Steigungszahl m.

Nun können wir natürlich auch sichergehen, daß dies auch für Folgen gilt, bei denen d eine negative Zahl ist. Schauen wir uns dazu zwei schon gezeigte Beispiele aus 2.1 an:

(c) $a_n = -0{,}5 \cdot n + 5$ mit den Werten $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3{,}5$; $a_4 = 3$; $a_5 = 2{,}5$ ...

$$4{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} 4 \xrightarrow[-0{,}5]{} 3{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} 3 \xrightarrow[-0{,}5]{} 2{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} \ldots$$

(d) $a_n = 7 - 3n$ mit den Werten $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$

$$4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-3]{} -2 \xrightarrow[-3]{} -5 \xrightarrow[-3]{} -8 \xrightarrow[-3]{} \ldots$$

Grundaufgabe:

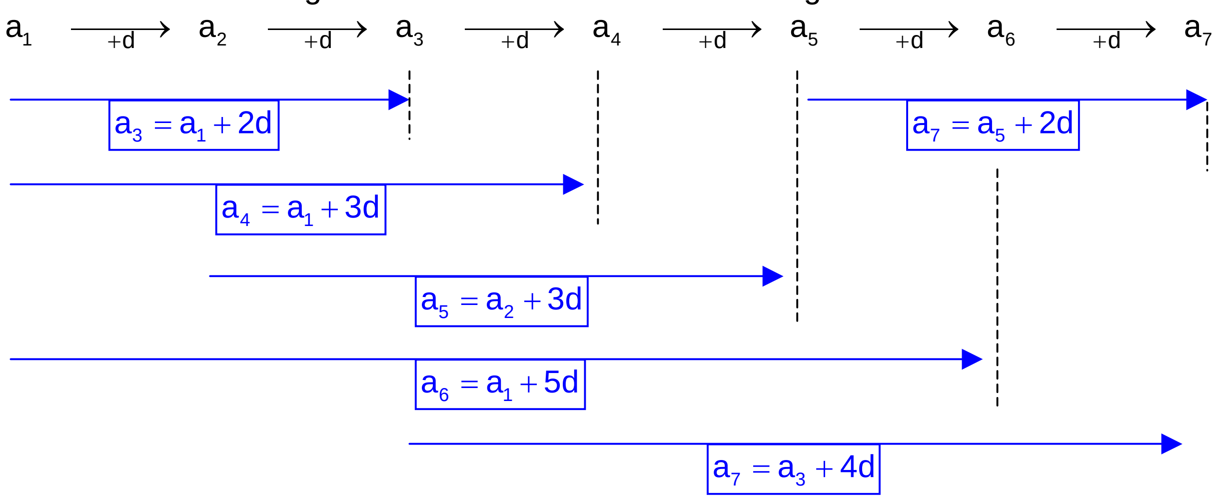
Beweise, daß die Folge a_n mit $a_n = 48 - 16\,n$ eine arithmetische Folge ist.

BEWEIS:

$$d = a_{n+1} - a_n = \left(48 - 16 \cdot (n+1)\right) - \left(48 - 16 \cdot n\right)$$
$$d = 48 - 16n - 16 - 48 + 16n = -16$$

Weil die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, liegt eine arithmetische Folge vor.

Aus dieser schönen Eigenschaft läßt sich eine Berechnungsformel herleiten:



Es gibt eine herrliche Gedächtnisstütze für die dargestellten Zusammenhänge, nämlich das Lattenzaun-Modell.

Betrachten wir die Gleichung $a_6 = a_2 + 4d$. Die bedeutet $a_6 - a_2 = 4d$.
Und das weiß nun doch jeder: Zwischen der 6. und der 2. Latte sind 4 Zwischenräume!

Oder $a_4 = a_1 + 3d \Leftrightarrow a_4 - a_1 = 3d$: Zwischen der 1. und 4. Latte sind doch drei Zwischenräume.

Dies kann man für folgende Aufgabenstellung ausnützen :

Grundaufgabe:

Von einer arithmetischen Folge kennt man

$$a_4 = 17 \quad \text{und} \quad a_{10} = 59 .$$

Berechne die ersten 5 Glieder der Folge.

LÖSUNG:

Nach der Lattenzaunmethode folgt

$$6d = a_{10} - a_4 = 59 - 17 = 42 \Rightarrow d = 7$$

Analog: $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 17 - 3 \cdot 7 = 17 - 21 = -4$

Also $-4 \xrightarrow[+7]{} 3 \xrightarrow[+7]{} 10 \xrightarrow[+7]{} 17 \xrightarrow[+7]{} 24 \xrightarrow[+7]{} \ldots$

Das ganze läßt sich verallgemeinern:

Dann gilt auch $a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Für eine beliebige arithmetische Folge gilt:

$$a_m - a_n = (m-n) \cdot d$$

$$a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel: Aus $a_1 = -4$ und $d = 7$ folgt

$a_n = -4 + (n-1) \cdot 7 = -4 + 7n - 7 = 7n - 11$

Dies ist der Funktionsterm aus dem obigen Beispiel !

Noch einige Beispiele:

(e) Eine arithmetische Folge ist gegeben durch $a_3 = 6$ und $a_{10} = -36$. Berechne a_1 und d und stelle die Berechnungsformel für a_n auf.

Lösung: $7d = a_{10} - a_3 = -36 - 6 = -42 \Rightarrow d = -6$.

$a_1 = a_3 - 2d = 6 - (-12) = 6 + 12 = 18$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 18 + (n-1) \cdot (-6) = 18 - 6n + 6 = 24 - 6n$.

(f) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_1 = 186$; $a_2 = 318$; $a_5 = 714$

LÖSUNG: (Wir müssen überprüfen, ob die Differenzen konstant sind:)

$a_2 - a_1 = 318 - 186 = 132 = d$

$a_5 - a_2 = 714 - 318 = 396$

Wenn eine arithmetische Folge vorliegt, muß $a_5 - a_2 = 3d$ sein:

$3d = 396 \Rightarrow d = 132$.

Dies stimmt, also liegt eine arithmetische Folge vor.
Und es gilt:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 186 + (n-1)\cdot 132 = 186 + 132n - 132 = 132n + 54$

(g) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_3 = 1900$; $a_7 = 1600$; $a_{14} = 1075$

LÖSUNG:

$a_7 - a_3 = 4d = -300 \Rightarrow d = -75$ (1)

$a_{14} - a_7 = 7d = 1075 - 1600 = -525 \Rightarrow d = -75$ (2).

Die Rechnung (1) und (2) führen zum selben Wert von d, also liegt eine arithmetische Folge vor mit $a_1 = a_3 - 2d = 1900 - 2\cdot(-75) = 2050$ und

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 2050 + (n-1)\cdot(-75) = 2050 - 75n + 75 = -75n + 2125$

(h) Zeige, daß jetzt keine arithmetische Folge vorliegt:
$a_2 = 320$; $a_4 = 392$; $a_7 = 504$

Beweis:

$a_4 - a_2 = 392 - 320 = 72 = 2d \Rightarrow d = 36$

$a_7 - a_4 = 503 - 392 = 111 = 3d \Rightarrow d = 37$

Weil die zweite Berechnung von d zu einem anderen Ergebnis führt, kann keine arithmetische Folge vorliegen !

(Man muß sich auch den passenden Text zu einer solchen Rechnung einfallen lassen !)

2.4 Aufgaben

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

(3) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind.

für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

(4) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n .

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

(5) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Lösungen auf der CD

3 Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Nur auf CD !