# Koch'sche Fläche

Wir haben hier folgendes Ziel; wir wollen herausfinden, ob und wie der von der Kurve eingeschlossene Flächeninhalt wächst.

Wie wir schon wissen, wächst die Länge der Kurve ins Unendliche, doch wie man sich schnell überzeugt, bleibt der Flächeninhalt (beispielsweise vom Umkreis um das Startdreieck) begrenzt.

Da andererseits (anschaulich klar) in jedem Schritt Dreiecke (= Fläche!) dazukommen, handelt es sich mit unserem Wissen um eine monoton wachsende Folge, welche beschränkt ist. Also muss es einen Grenzwert für die Fläche geben. Und der ist (noch unbewiesen) das 1.6-fache des Startwertes, welcher die Fläche des ersten Dreiecks ist.

Den Startwert bestimmen wir schnell; er ist allgemein bei gleichseitigen Dreiecken $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Dabei ist $a$ die Kantenlänge, welche wir mit $a = 1$ festgelegt haben. Und damit ist unser $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Nun kommen jeden Schritt Dreiecke dazu. Diese sind zwar in der Anzahl stetig wachsend, andererseits werden sie auch immer kleiner.

Man könnte den Zuwachs $\Delta A$ schreiben wie folgt: $\Delta A_k = n_k \cdot (a_k)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Damit ist gemeint, dass $n_k$ die (steigende) Anzahl der Dreiecke im k-ten Schritt ist und $a_k$ die (je Schritt schrumpfende) Grundseite der Dreiecke. Das sind Folgen. Die schauen wir uns jetzt an. Dabei sehen wir nur auf den Flächenzuwachs bei einer Seite des Dreiecks. Warum? Weil wir das ja einfach mit 3 multiplizieren können.

Zuerst $n_k$: Die Anzahl der dazukommenden Dreiecke ist im 0. Schritt einfach $n_0 = 1$(die Null ist willkürlich, oft startet man mit der Eins. Einmal festgelegt, bleibt man aber bei seiner Nummerierung!). Dann kommen $n_1 = 4$, $n_2 = 16$, usw. dazu. Also gilt allgemein $n_k = 4^k$. Das war es hierzu.

Nun $a_k$: Die Grundseite in unserem nullten Schritt, also bei dem ersten neuen Dreieck auf der Seite ist $a_0 = \frac{1}{3}$. Dann ist es $a_1 = \frac{1}{9}$, da ja in jedem Konstruktionsschritt die Gesamtlänge gedrittelt wird. Es folgen $a_2 = \frac{1}{27}$ usw. Man findet hier allgemein $a_k = (\frac{1}{3})^{k+1}$. Dabei brauchen wir die $+1$ in der Potenz, damit $a_0$ wirklich $\frac{1}{3}$ ist und nicht $a_0 = (\frac{1}{3})^0 = 1$. Man mache sich das klar.

Nun haben wir also eine Möglichkeit, den Flächenzuwachs einer der drei Dreieckseiten in jedem Schritt mit unserer obigen Formel anzugeben:

$\Delta A_k = n_k \cdot (a_k)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4^k \cdot ((\frac{1}{3})^{k+1})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Das ist aber noch einfacher zu schreiben. Wir formen äquivalent um:

$\Delta A_k = 4^k \cdot (\frac{1}{3})^{2(k+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4^k \cdot (\frac{1}{9})^{k+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4^k \cdot (\frac{1}{9})^k \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (\frac{4}{9})^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}$

Im Prinzip haben wir schon alle Denkleistung vollbracht. Der Rest ist Technik. Wie ist den nun der Gesamtflächeninhalt der Kurve (also nach unendlich vielen Schritten)?

$A_{gesamt} = A_0 + 3(\Delta A_0 + \Delta A_1 + ...)$

Also der Wert ist ja die Summe aller Zuwächse $3 \cdot \Delta A_k$ (dreimal, da wir nur eine Seite berücksichtigt hatten), addiert zum Ausgangsflächeninhalt $A_0$.

$$A_{gesamt} = A_0 + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}((\frac{4}{9})^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}) = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^k$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe mit $q = 4/9$ und wird bis unendlich addiert. Der Wert der Reihe ist im n. Schritt normalerweise $s_n = (1 - q^n)/(1 - q)$. Da nun aber $q < 1$ gilt und $n \to \infty$ läuft, ist $q^n = 0$ im Limes.

Also ist der Wert der obigen Reihe einfach

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^k = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Gut, also wird $A_{gesamt} = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{9}{5} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot 4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

Vergleichen wir das mit $A_0$, dem Flächeninhalt des ersten Dreiecks, so findet man:

$$\frac{A_{gesamt}}{A_0} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8}{5} = 1.6$$