Folgen

Beispiel *Sparbuch*

In einem Sparbuch sind alle Buchungsposten (Gutschriften, Belastungen, usw.) für ein bestimmtes Sparkonto, aufgelistet -- **geordnet** nach dem Buchungstag. Die Buchungsbeträge in den einzelnen Zeilen bilden somit eine *„geordnete Menge“* von (meist reellen) Zahlen.

DEFINITION (FOLGE)
*Eine **Folge** ist eine Anordnung von reellen Zahlen. Die einzelnen Zahlen heißen **Glieder** der Folge. Formaler ausgedrückt:*

Eine Folge ist eine Abbildung f von $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i \mapsto a_i$$

Folgen werden bezeichnet mit:

normal:	hier:
(a_i)	$\langle a_i \rangle$

Folgen können definiert werden

- durch **Aufzählen** der einzelnen Glieder,
- durch Angabe eines **expliziten Bildungsgesetzes** (man kann jedes a_i direkt berechnen), oder
- durch **Rekursion** (d.h. jedes Folgeglied wird durch seine Vorgänger bestimmt).

BEISPIEL

Aufzählung: $\langle a_i \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$

Bildungsgesetz: $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$

Rekursion: $\langle a_i \rangle$, $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i + 2$

Wichtige Eigenschaften von Folgen sind unter anderem:

Bezeichnung	Definition
monoton steigend	$a_{i+1} \geq a_i$
monoton fallend	$a_{i+1} \leq a_i$
alternierend	$a_{i+1} \cdot a_i < 0$,
	d.h. das Vorzeichen wechselt.
beschränkt	$\lvert a_i \rvert \leq M$, für ein $M \in \mathbb{R}$.

Beispiel

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle$ *ist monoton steigend*

$\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$ *ist monoton fallend*

$\langle 1, -2, 3, -4, 5, \ldots \rangle$ *ist alternierend*

$\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots \rangle$ *ist beschränkt (durch* $M = 1$ *)*

Reihen

Beispiel *Sparbuch: Guthaben*

Wir können nun in unserem Sparbuchbeispiel die ersten k Buchungsbeträge addieren:

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$$

So eine Summe heißt die k-te **Teilsumme** (**Partialsumme**) der Folge $\langle b_i \rangle$.

<u>DEFINITION</u> (REIHE)

Die Folge $\langle s_k \rangle$ *aller Teilsummen einer Folge* $\langle a_i \rangle$ *heißt die* ***Reihe*** *der Folge* $\langle a_i \rangle$.

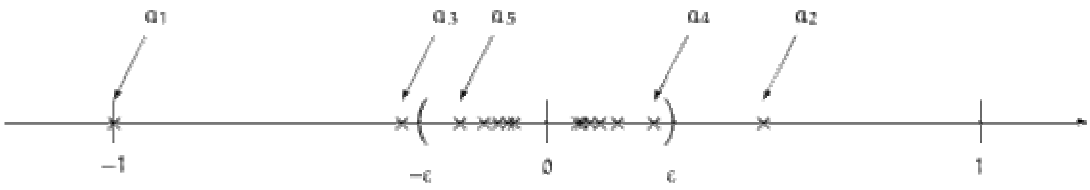
BEISPIEL

Die Reihe der Folge $\langle a_i \rangle = \langle 2\,i - 1 \rangle$ *lautet (in verschiedenen Darstellungen)*

$$\langle s_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} 2\,i - 1 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rangle = \langle k^2 \rangle$$

Grenzwerte von Folgen

Betrachten wir die Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$:



Die Folgeglieder *„streben``* mit wachsendem n gegen 0. Wir sagen, *die Folge* $\langle a_n \rangle$ ***konvergiert*** *gegen 0* .

<u>DEFINITION</u> (LIMES)

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ *heißt* ***Grenzwert*** *(oder* ***Limes****) einer Folge* $\langle a_n \rangle$*, wenn es für jedes noch so kleine Intervall* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *ein* a_N *gibt, sodaß* $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *für alle* $n \geq N$ *(m.a.W.: alle Folgeglieder ab* a_N *liegen im Intervall).*

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**. Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.

Wir schreiben dafür

$$\boxed{\langle a_n \rangle \to a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a}$$

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert. So eine Folge heißt dann **divergent**.

BEISPIEL

Die Folge $\langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rangle$ *besitzt keinen Grenzwert, da sie größer als jede beliebige natürliche Zahl wird.*

Diese Folge ,,strebt`` allerdings gegen ∞.Derartige Folgen heißen **bestimmt divergent** gegen ∞ (bzw. $-\infty$). Wir schreiben dafür

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)}$$

Folgen, die weder *konvergent* noch *bestimmt divergent* sind heißen (**unbestimmt**) **divergent**.

BEISPIEL

Die Folge $\langle (-1)^n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$ *besitzt keinen Grenzwert. Der Grenzwert ist weder 1 oder* -1*, noch strebt die Folge gegen* ∞ *oder* $-\infty$*. Sie ist daher (unbestimmt) divergent.*

Die Grenzwerte wichtiger Folgen.

$$\lim_{n\to\infty} c = c \text{ für alle } c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{für } \alpha > 0 \\ 1 & \text{für } \alpha = 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{für } q > 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{für } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = \lim_{n\to\infty} q^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ +\infty & \text{für } 1 > q > 0 \\ \nexists & \text{für } 0 > q > -1 \end{cases}$$

Mit Hilfe von Rechenregeln lassen sich Grenzwerte komplexerer Folgen auf die Grenzwerte einfacherer (bekannter) Folgen zurückführen.

Im folgenden seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. $\langle c_n \rangle$ sei eine beschränkte Folge.

	Regel	
(1)	$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n + d) = c \cdot a + d$	
(2)	$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$	
(3)	$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$	
(4)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$	für $b \neq 0$
(5)	$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0$	falls $a = 0$

(6)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$	

Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ sind **nicht definiert**. Der Grenzwert könnte jeder beliebige Wert bzw. die Folge divergent sein. Aus $\lim = \frac{1}{0}$ läßt sich *nicht* schließen, daß $\lim = \infty$ (oder $\lim = -\infty$).

BEISPIEL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^2+1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad (= \text{nicht definiert})$$

Trick: *Kürzen durch die*
höchste *vorkommende Potenz im* ***Nenner****.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^2}{\cancel{n}^2} \cdot \frac{1+n^{-2}}{1-n^{-2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+n^{-2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1-n^{-2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Arithmetische Folgen

Die *Differenz* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$$

Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Jedes Glied ist das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})}$$

Arithmetische Reihe (Summenformel):

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)\,d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}}$$

Geometrische Folgen

Der *Quotient* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

Bildungsgesetz:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Jedes Glied ist das *geometrische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}}$$

Geometrische Reihe (Summenformel):

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ für } q \neq 1}$$

Die Summenformel s_n für die geometrische Reihe erhalten wir durch folgenden Trick:

$$s_n = a_1\, q^0 + a_1\, q^1 + \cdots + a_1\, q^{n-1}$$

Multiplizieren mit q

$$q \cdot s_n = a_1\, q^1 + \cdots + a_1\, q^{n-1} + a_1\, q^n$$

Subtrahieren

$$s_n - q \cdot s_n = a_1\, q^0 - a_1\, q^n$$

Herausheben

$$s_n\,(1 - q) = a_1\,(1 - q^n)$$

Also

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Es ist auch üblich bei der Definition von Folgen und Reihen bei 0 anstatt bei 1 zu zählen zu beginnen.

Die Bildungsgesetze und Summenformeln für

die *arithmetische Folge* lauten dann

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

und für die *geomoetrische Folge*

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \text{bzw.} \quad s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$